

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

P. NEGRINI

PUNTI REGOLARI PER IL PROBLEMA GENERALIZZATO DI
DIRICHLET NEGLI SPAZI ARMONICI

10 GIUGNO 1982

INTRODUZIONE

Sia X un aperto di R^n ; sia $L = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$ un operatore ellittico-parabolico definito in

X . Se L soddisfa alcune ipotesi, è possibile applicare il metodo di Peron e Wiener, per associare ad ogni aperto limitato Ω , con $\bar{\Omega} \subseteq X$, e ad ogni funzione $\phi \in C(\partial\Omega)$, una "soluzione generalizzata", $L_{H_\phi}^\Omega$ del problema di Dirichlet

$$(1) \quad \begin{cases} Lu = 0 & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \phi \end{cases}$$

La funzione $u = L_{H_\phi}^\Omega$ così ottenuta, soddisfa, in qualche senso, l'equazione differenziale in Ω ; mentre non si sa nulla, in generale, riguardo il suo comportamento sul bordo.

Diremo che un punto $x_0 \in \partial\Omega$ è L -regolare per Ω se, per ogni $\phi \in C(\partial\Omega)$ si ha che:

$$\lim_{\Omega \ni x \rightarrow x_0} L_{H_\phi}^\Omega(x) = \phi(x_0)$$

(quindi, Ω è un aperto L -regolare se tutti i punti di $\partial\Omega$ sono regolari per Ω). Sorge così il problema di determinare, dato un qualunque aperto limitato Ω , i punti L -regolari di Ω .

Quando $L = \Delta$ (operatore di Laplace), i punti regolari sono sta

ti caratterizzati da Wiener, facendo uso del concetto di "capacità" ([14], [15]); in [8] (Littman-Stampacchia-Weinberger), la questione è risolta per gli operatori ellittici: si prova infatti che:

[se L è un operatore uniformemente ellittico a coefficienti misurabili e limitati i punti L -regolari per Ω e i punti Δ -regolari per Ω sono gli stessi.

Per quanto riguarda gli operatori parabolici, Landis ([7]) ha caratterizzato i punti regolari relativamente all'operatore del calore; Lanconelli ([6]) ha provato l'equivalenza fra la regolarità di un punto per una certa classe di operatori parabolici, e la regolarità per tutti gli operatori della forma $a \Delta - \frac{\partial}{\partial t}$ ($a > 0$).

Un altro tipo di approccio a questo problema si incontra, per esempio, in [13], in cui Tychonov dimostra che, posto $0 = \Omega \times]0, T[$, con Ω aperto limitato di R^n , l'aperto Ω è Δ -regolare se e solo se i punti di $\partial\Omega \times]0, T[$ sono regolari per 0 relativamente all'operatore del calore.

Questo confronto fra la regolarità dei punti "lateral" di un aperto di tipo cilindrico in R^{n+1} rispetto ad un operatore parabolico, e la regolarità dei punti di frontiera della "base" rispetto all'operatore ellittico corrispondente è ripreso, in casi più generali, da Fulks ([5]), Chan & Young ([3]).

In [9], questo tipo di risultato viene dimostrato in un ambiente astratto: indicati con X , e $Y = X \times]a, b[$ due spazi β -armonici (la definizione sarà precisata nel seguito), con Ω un aperto relativamente compatto $\subseteq X$, con 0 l'aperto $\Omega \times]0, T[\subseteq Y$, si prova che, se X e Y soddisfanno opportune ipotesi,

[sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- i) $x_0 \in \partial\Omega$ è regolare per Ω
- ii) (x_0, t) è regolare per 0 per ogni $t \in]0, T[$ (o per un $t \in]0, T[$).

Da questo teorema astratto si ottengono, come applicazioni, risultati relativi ad un'ampia classe di operatori differenziali del secondo

do ordine, di tipo ellittico-parabolico.

Si ritrovano alcuni risultati noti, tra cui quello di Tychonov ([13]) citato prima; ma anche alcune applicazioni originali. In particolare, si ottiene che:

se Ω è un aperto limitato di R^2 , indicati rispettivamente con L e M gli operatori:

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x \frac{\partial}{\partial y} \quad (\text{parabolico degenere})$$

$$M = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} \quad (\text{operatore di Kolmogorov});$$

con $0 \leq t \leq T$ l'aperto $\Omega \times]0, T[\subseteq R^3$, e con (x_0, y_0) un punto di $\partial\Omega$, sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- a) (x_0, y_0) è L -regolare per Ω
- b) (x_0, y_0, t) è M -regolare per 0 per ogni t (o per un t) $\in]0, T[$.

A causa della complicata espressione della soluzione fondamentale (cfr., per esempio, [11]), lo studio diretto dell'operatore L presenta notevoli difficoltà. Sfruttando risultati noti riguardo all'operatore di Kolmogorov (in particolare, Scornazzani [12] dà una caratterizzazione geometrica dei punti M -regolari per aperto di R^3 , ed alcune condizioni sufficienti di regolarità), si trovano criteri di L -regolarità dei punti di $\partial\Omega$.

E' interessante notare che, in questo caso, si applica la implicazione ii) \Rightarrow i) della equivalenza riportata a pag. 2; cioè, da risultati noti riguardo all'operatore in dimensione superiore, se ne deducano altri, relativi all'operatore in dimensione inferiore.

I risultati più interessanti si hanno quando l'aperto $\Omega \subseteq R^2$ è tale che $\partial\Omega$ contiene punti con ascissa nulla: per i punti $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$

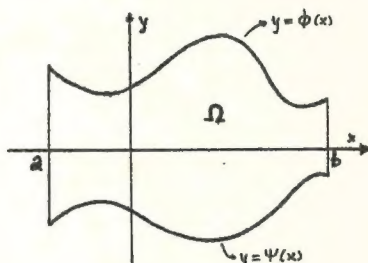
con $x_0 \neq 0$ si possono infatti sfruttare criteri già noti di regolarità, relativi agli operatori parabolici.

Consideriamo, per esempio, un aperto della forma:

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b ; \psi(x) < y < \phi(x)\}$$

con $a < 0 < b$;

$$\psi, \phi \in C^3([a,b], \mathbb{R}).$$



Applicando il teorema (3.3) di [12], e il teorema 4 di [9], si ottiene che:

- [se $\phi'(0) \neq 0$, oppure $\phi'(0) = 0$ e $\phi''(0) \leq 0$ allora il punto $(0, \phi(0))$ è L-regolare per Ω ;
se $\psi'(0) \neq 0$, oppure $\psi'(0) = 0$ e $\psi''(0) \geq 0$ allora il punto $(0, \psi(0))$ è L-regolare per Ω .

§ 1. ALCUNE DEFINIZIONI

Le definizioni alle quali ci riferiremo sono essenzialmente riprese da [4].

Sia X uno spazio topologico localmente compatto, con base numerabile. Un fascio di funzioni su X , \mathcal{U} , si dice "fascio iperarmonico" se, per ogni aperto $U \subseteq X$, $\mathcal{U}(U)$ è un cono convesso di funzioni inferiormente semicontinue da U a $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

La corrispondenza

$$U \rightarrow \mathcal{U}(U) \cap (-\mathcal{U}(U)) = H(U)$$

risulta un fascio armonico H , su X .

Le funzioni $f \in U(U)$ si dicono "funzioni iperarmoniche"; le funzioni $f \in H(U)$ si dicono "funzioni armoniche" (sull'aperto U).

Rispetto a queste funzioni armoniche, si può introdurre il problema generalizzato di Dirichlet, e si possono definire gli aperti regolari (vedi Seminario Lanconelli).

Una funzione $u \in U(X)$ si dice *superarmonica* se, per ogni aperto regolare $V \subseteq X$, si ha $\mu^V u \in H(V)$ (con $\mu^V u$ denotiamo la funzione che in ciascun punto $x \in V$ vale: $\int_{\partial V} u d\mu_x^V$).

La famiglia delle funzioni superarmoniche su X si denota con $S(X)$; con $S^+(X)$ indichiamo la famiglia delle funzioni superarmoniche ≥ 0 .

Diremo che lo spazio topologico X , dotato del fascio iperarmonico U è uno

spazio β -armonico

se soddisfa i seguenti quattro assiomi:

- a. H è non degenerare in ogni punto di X (cioè, $\forall x \in X \exists V$ aperto regolare, $\exists h \in H(V)$, tali che: $x \in V$ e $h(x) \neq 0$).
- b. Gli aperti regolari costituiscono una base per X .
- c. H ha la proprietà di convergenza di Bauer (cioè, per ogni aperto $\Omega \subseteq X$, e per ogni successione (f_n) in $H(\Omega)$, si ha che:

$$\left. \begin{array}{l} f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ f(x) = \sup\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\} \text{ loc. limitata in } \Omega \end{array} \right\} \Rightarrow f \in H(\Omega).$$

- d. $S^+(X)$ separa i punti di X

(cioè, $\forall x, y \in X (x \neq y \Rightarrow \exists u, v \in S^+(X): u(x) v(y) \neq u(y) v(x))$).

Se $\Omega \subseteq X$ è un aperto, e X è uno spazio β -armonico, definiamo $H^*(\Omega)$ ponendo; per ogni $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,

$$u \in H^*(\Omega) \Leftrightarrow \forall V (V \text{ aperto regolare, e } \overline{V} \subseteq \Omega \Rightarrow \mu^V u \leq u).$$

H^* così definito risulta essere un fascio iperarmonico, e coincide con u .

Chiamiamo $H_* = -H^*$. Le funzioni di H_* si chiamano *ipoarmoniche*.

Come conseguenze della definizione di "spazio β -armonico" ora data si ha, fra l'altro, che:

1. ogni aperto $V \subseteq X$ è di tipo MP ([4], corollario 2.3.3.);
2. ogni aperto $V \subseteq X$ è risolutivo.

Sia $\Omega \subseteq X$ un aperto, e $y \in \partial\Omega$. Se V è un intorno aperto di y , e $u \in H^*(V \cap \Omega)$, si dice che u è una *barriera per Ω in y* , se:

1. $u(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega \cap V$;
2. $\lim_{\Omega \cap V \ni x \rightarrow y} u(x) = 0$.

Le funzioni-barriera caratterizzano i punti regolari di $\partial\Omega$, in base al seguente teorema:

[Teorema di Bouligand: $y \in \partial\Omega$ è regolare per Ω se e solo se esiste una barriera per Ω in y ([1], Satz 4.3.3).]

La tecnica che useremo per provare che certi punti di frontiera di aperti sono regolari per l'aperto considerato sarà proprio quella di costruire barriere.

§ 2. IL TEOREMA PRINCIPALE

Sia X uno spazio β -armonico; sia H il relativo fascio armonico. Sia $]a, b[$ un intervallo aperto di \mathbb{R} , e $Y = X \times]a, b[$, con la topologia prodotto di quella di X e quella naturale di $]a, b[$.

Sia assegnata in Y una struttura di spazio β -armonico, e sia K il relativo fascio armonico.

Supponiamo, per semplicità, che per un $T > 0$ risulti
 $[0, T] \subseteq]a, b[$.

Sia Ω un aperto, $\Omega \subseteq X$, Ω relativamente compatto; definiamo
 $0 = \Omega \times]0, T[\subseteq Y$.

Supponiamo che gli spazi X e Y siano fra loro legati dalle seguenti condizioni:

- [
1. Per ogni $\Omega \subseteq X$, per ogni $u \in H(\Omega)$ risulta $u \otimes 1 \in K(0)$.
 2. Per ogni $\Omega \subseteq X$, se $v \in K(0)$, e se per ogni $x \in \Omega$ la funzione
- $]0, T[\ni t \rightarrow v(x, t)$

è non crescente, allora, per ogni fissato $t \in]0, T[$ la funzione $v(\cdot, t) \in H^*(\Omega)$.

Queste due condizioni, come le seguenti, sono formulate seguendo il modello "concreto" delle condizioni a cui soddisfano due spazi $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^n \times]a, b[$, in cui le strutture di spazio armonico sono generate, rispettivamente, da un operatore ellittico-parabolico L avente opportune proprietà, e dall'operatore $M = L - \frac{\partial}{\partial t}$.

Le condizioni 1 e 2 riescono allora abbastanza naturali, ricordando che, se per un operatore L ellittico-parabolico vale un principio di minimo, allora le funzioni armoniche (rispettivamente: iperarmoniche) di classe C^2 sono, relativamente a L , quelle u tali che $Lu = 0$ ($Lu \leq 0$).

Supponiamo inoltre che:

- [
3. Per ogni $z \in X$ $\exists W$ intorno aperto di z tale che,
- $\forall x \in W \exists h \in H(W), h > 0, \exists u \in H^*(W)$ tali che $u(z) h(x) > u(x) h(z)$.

Questa ipotesi assicura l'esistenza di una barriera armonica in ogni punto regolare, in X ([1], teorema 4.3.8). Essa è verificata,

per esempio, se:

$\forall z \in X \exists W$ intorno aperto di z , $\exists \sigma \in H_*(W)$ tale che $\sigma(z) = 0$, $\sigma(\xi) > 0$
 $\forall \xi \in W - \{z\}$ (le funzioni h e u della condizione 3 sono, rispettivamente, una funzione armonica $h > 0$ definita in W , o in un eventuale intorno più piccolo, di z , e $(-\sigma)$).

Sarà quest'ultima la condizione che verificheremo nelle applicazioni, anziché la 3.

4. Per ogni aperto $V \subseteq Y$, per ogni $\hat{y} = (\hat{x}, \hat{t}) \in V$, il supporto della misura armonica $\mu_{\hat{y}}^V$ è contenuto nell'insieme:

$$A_{\hat{t}} = \{y = (x, t) \in Y \mid t \leq \hat{t}\}.$$

5. Per ogni aperto $V \subseteq Y$, per ogni $\delta \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\delta_V \equiv \{(x, t - \delta); (x, t) \in V\} \subseteq Y$$

e per ogni $u \in K(V)$, la funzione

$$\delta_V \ni (x, t) \rightarrow u(x, t + \delta)$$

è K -armonica in δ_V (nel caso concreto, questa ipotesi corrisponde a scegliere operatori i cui coefficienti non dipendono da t).

6. Per ogni $(x_0, t_0) \in X \times]0, T[$ esistono un intorno W di x_0 in X e una funzione $\phi \in C(\bar{W} \times]0, T[)$, K -ipoarmonica in $W \times]0, T[$, tale che:

- i) $\phi(x, t) \geq 0 \quad \forall (x, t) \in W \times]0, T[$ con $x \neq x_0$; $\phi(x_0, t_0) = 0$;
- ii) $\forall x \in W$ la funzione

$$]0, T[\ni t \rightarrow \phi(x, t)$$

è non crescente su $]0, T[$.

Teorema. Supponiamo che siano soddisfatte dagli spazi X e Y le condizioni 1-6. Siano $\Omega \subseteq X$ un aperto relativamente compatto, $x_0 \in \partial\Omega$ e $0 = \Omega \times]0, T[$.

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- a. x_0 è H -regolare per Ω .
- b. $\forall t \in]0, T[, (x_0, t)$ è K -regolare per 0 .
- c. $\exists t_0 \in]0, T[: (x_0, t_0)$ è K -regolare per 0 .

Dimostrazione.

a. \Rightarrow b. Se x_0 è regolare per Ω esiste, in conseguenza dell'ipotesi 3 una H -barriera H -armonica b per Ω in x_0 . La funzione $b \otimes 1$, in base all'ipotesi 1, risulta una K -barriera per 0 nei punti (x_0, t) , i quali sono dunque K -regolari per 0 .

Notiamo che, per questa parte della dimostrazione, sono sufficienti le ipotesi 1 e 3.

b. \Rightarrow c. E' ovvio.

c. \Rightarrow a. Sia (x_0, t_0) K -regolare per 0 . Si può supporre, senza perdere in generalità, che $\exists U$ aperto $\subseteq X$, con $\overline{\Omega} \subseteq U$, e $h \in H(U)$, $h > 0$ in U . Sia

$$m = \min\{h(x), x \in \overline{\Omega}\} \quad (\overline{\Omega} \text{ è compatto})$$

e sia ϕ la funzione dell'ipotesi 6, che possiamo supporre definita su tutto $\overline{0}$. Sia

$$M = \max\{\phi(x, t); (x, t) \in \overline{0}\}.$$

Fissiamo $\varepsilon \in]0, t_0[,$ e definiamo $\hat{\phi}: 0 \rightarrow \mathbb{R}$, ponendo:

$$\hat{\phi}(x, t) = \begin{cases} \phi(x, t) & \text{se } t > \varepsilon \\ \frac{M}{m} h(x) & \text{se } t \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Si verifica che la funzione $\hat{\phi}$ è K-ipoarmonica in 0; essa è, inoltre, strettamente positiva in 0 ed è tale che:

$$\lim_{0 \ni (x,t) \rightarrow (x_0,t_0)} \hat{\phi}(x,t) = 0.$$

Poniamo:

$$\phi = \hat{\phi}|_{\partial 0} \quad ; \quad w = K_{\phi}^0$$

(w è la soluzione generalizzata del problema di Dirichlet relativo allo spazio armonico Y, sull'aperto 0, con dato sul bordo ϕ).

Facendo uso delle ipotesi e applicando il principio di minimo per le funzioni K-iperarmoniche, si dimostra che la funzione w, la quale, per costruzione, è K-armonica, è non crescente nella variabile t.

Allora, per l'ipotesi 2, se si pone

$$\beta(x) = w(x, t_0) \quad \forall x \in \Omega$$

si ha che $\beta \in H^*(\Omega)$. D'altra parte, poiché risulta $\hat{\phi} \in \underline{K}_{\phi}^0$, si ha $\hat{\phi} \leq w$ in 0; poiché $\hat{\phi}$ è strettamente positiva in 0, β risulta strettamente positiva in Ω ; e poiché (x_0, t_0) è K-regolare per 0, si ha:

$$\lim_{\Omega \ni x \rightarrow x_0} \beta(x) = \lim_{\Omega \ni x \rightarrow x_0} w(x, t_0) = \phi(x_0, t_0) = 0$$

perciò, β è una H-barriera per Ω in x_0 , e x_0 è, dunque, H-regolare per Ω .

§ 3. APPLICAZIONI

Diamo qui una applicazione del risultato stabilito ad una classe di operatori ellittico-parabolici: come caso particolare, otterremo i

risultati citati all'inizio, relativi agli operatori

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{e} \quad M = L - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Sia A un aperto di R^n ; sia L l'operatore:

$$Lu = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u(x)$$

Supponiamo che:

i) $a_{ij}, b_i, c \in C^\infty(A, R)$; $a_{ij} = a_{ji}$ per $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$;

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq 0 \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n, \quad \forall x \in A$$

$$\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(x)| > 0 \quad \forall x \in A.$$

ii) L'algebra di Lie generata dagli operatori

$$X_k = \sum_{j=1}^n a_{kj}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$X_0 = \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

abbia rango n in ogni punto di A (questa condizione assicura che L è ipoelettico; cfr. [10]).

iii) $\exists \omega \in C^2(A, R)$: $\omega > 0$ e $L\omega < 0$ in A (questa condizione serve per avere il principio di minimo).

Sia X un aperto limitato di R^n , con $\bar{X} \subseteq A$.

Per ogni aperto $\Omega \subseteq X$, sia $L^H(\Omega)$ l'insieme delle funzioni

$u \in C^\infty(\Omega)$ tali che $Lu = 0$ in Ω ; allora, L_H è un fascio armonico in X .

Ricordando che, se V è un aperto $\subseteq X$ con frontiera non caratteristica per L , allora V è regolare per L (cfr. [2]), si costruisce, seguendo [2] una base di aperti per X L_H -regolari, nel modo seguente: sia $x_0 \in X$. Allora, $\exists \bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$, tale che

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) \bar{v}_i \bar{v}_j > 0.$$

Per continuità, esistono un intorno P di x_0 in X , e un cono C di asse \bar{v} in \mathbb{R}^n , tali che per ogni $(x, v) \in P \times C$ si ha

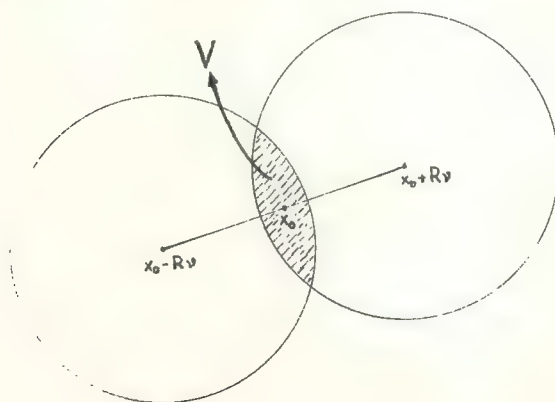
$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) v_i v_j > 0.$$

Possiamo supporre $\|\bar{v}\| = 1$.

Fissati $R > 0$, $\delta > 0$, sia V l'insieme:

$$V = S(x_0 + R\bar{v}, R + \delta) \cap S(x_0 - R\bar{v}, R + \delta)$$

V è un intorno di x_0 ; inoltre, se scegliamo R sufficientemente grande,



e δ sufficientemente piccolo, V è contenuto in P , e inoltre ciascun punto di ∂V ha una normale esterna appartenente a C , quindi, non caratteristica; dunque, V è L^H -regolare; è chiaro, infine, che gli aperti V così definiti costituiscono una base di intorni di x_0 .

Se $V \subseteq X$ è un aperto L^H -regolare e $\phi \in C(\partial V)$, chiamiamo $L_{H,\phi}^V$ la soluzione (che esiste ed è unica) del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } V \\ u|_{\partial V} = \phi. \end{cases}$$

Se $\Omega \subseteq X$, e $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, diremo che u è H -iperarmonica in Ω ($u \in H^*(\Omega)$) se u è inferiormente semicontinua, e se per ogni aperto regolare $V \subseteq \bar{V} \subseteq \Omega$ risulta

$$u(x) \geq \int_{\partial V} u \, d\mu_x^V \quad \forall x \in V.$$

Si riconosce allora che $\Omega \rightarrow H^*(\Omega)$ è un fascio iperarmonico, che dà a X la struttura di spazio β -armonico (l'assioma di convergenza di Bauer è conseguenza del fatto che, in questo caso, le funzioni armoniche sono di classe C^∞ ; per dimostrare la validità dell'assioma d) di separazione, si può costruire, a partire dalla funzione ω dell'ipotesi iii), la coppia di funzioni $u, v \in S^+(X)$ che separano due prefissati punti $x, y \in X$, $x \neq y$).

Sia ora M l'operatore definito in $A \times \mathbb{R}$,

$$M = L - \frac{\partial}{\partial t}$$

(indichiamo i punti di $A \times \mathbb{R}$ con $y = (x, t) = (x_1, x_2, \dots, x_n, t)$).

Supponiamo che:

ii') L'algebra di Lie generata dagli operatori $X_1, X_2, \dots, X_n, X_0 - \frac{\partial}{\partial t}$ abbia

rango $n+1$ in ogni punto di A .

Osserviamo che questa condizione implica la ii); inoltre, se ω è la funzione di iii), risulta $M\omega = L\omega < 0$.

Sia $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ un intervallo limitato; sia $Y = X \times]a, b[$; forniamo a Y una struttura di spazio β -armonico, con il medesimo procedimento spiegato più sopra.

Indichiamo con M_K il fascio armonico delle soluzioni dell'equazione $Mu = 0$; chiameremo queste ultime *funzioni K -armoniche*.

Si dimostra che gli spazi X e Y soddisfano le ipotesi 1-6.

Le condizioni 1 e 2 sono soddisfatte, perché le funzioni L_H - e M_K -armoniche sono di classe C^∞ , e le funzioni $u \in C^2(\Omega)$ tali che $Lu \leq 0$ sono H -iperarmoniche, in virtù del principio di minimo classico.

La condizione 3 è verificata, perché, ad esempio, preso $x_0 \in X$, la funzione

$$(*) \quad \sigma(x) = \exp(\|x - x_0\|^2) - 1$$

soddisfa le condizioni che assicurano il verificarsi di (3).

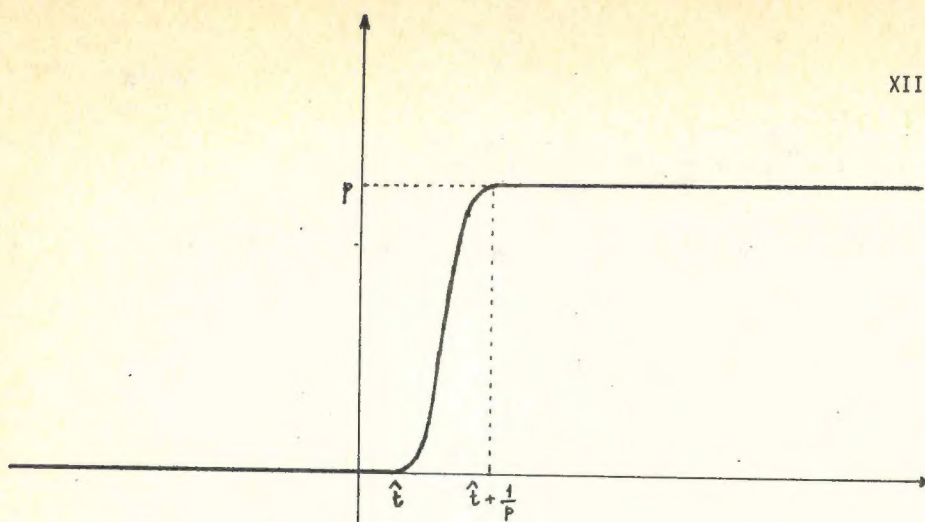
Per verificare la condizione 4, prendiamo $\hat{t} \in]a, b[$, e una successione di funzioni $(\phi_p)_{p \in \mathbb{N}}$, $\phi_p \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, non decrescenti, e tali che:

$$\phi_p(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

$$\phi_p(t) = 0 \quad \forall t \leq \hat{t}$$

$$\phi_p(t) \leq \phi_{p+1}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

$$\phi_p(t) = p \quad \forall t \geq \hat{t} + \frac{1}{p}$$



Le funzioni $v_p : Y \rightarrow \mathbb{R}$, $v_p = 1 \otimes \phi_p$ sono K -iperarmoniche, essendo $M v_p = -\phi_p' \leq 0$; perciò, anche la funzione

$$v(x, t) = \sup\{v_p(x, t); p \in \mathbb{N}\}$$

è K -iperarmonica. D'altra parte, v vale 0 in $A_{\hat{t}}$, $+\infty$ in $Y - A_{\hat{t}}$; quindi, per definizione ([4], cap. 6), $A_{\hat{t}}$ è K -assorbente; questo equivale alla nostra condizione 4 ([4], proposizione 6.1.1).

La ipotesi 5 è soddisfatta perché i coefficienti di M non dipendono da t .

La condizione 6, infine, è soddisfatta dalla funzione $\phi = \sigma \otimes 1$, essendo σ la funzione (*) di pag. 14.

Per gli operatori L e M aventi le proprietà sopra dichiarate vale dunque il seguente

Teorema. Siano Ω un aperto limitato $\subseteq X$, $x_0 \in \partial\Omega$, $T \in \mathbb{R}^+$, $0 = \Omega \times]0, T[$. Allora, x_0 è L -regolare per Ω se e solo se (x_0, t) è M -regolare per 0 per ogni t (o per un t) $\in]0, T[$.

Prendendo ora

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x \frac{\partial}{\partial y} ; M = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t}$$

si ottiene, come caso particolare, l'applicazione esposta all'inizio.

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. BAUER: "Harmonische Raume und ihre Potentialtheorie" Lecture Notes in Mathematics, n. 22, Springer Verlag 1966.
- [2] J.M. BONY: "Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème du Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés". Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 19, I (1969), 277-304.
- [3] C.Y. CHAN & E.C. YOUNG: "Regular Regions for Parabolic and Elliptic Equations" Portugaliae Mathematica, vol. 36, Fasc. 1, 1977, 7-12.
- [4] C. CONSTANTINESCU & A. CORNEA: "Potential Theory on Harmonic Spaces", Springer Verlag, Berlin 1972.
- [5] W. FULKS: "Regular Regions for the Heat Equation", Pacific J. Math. 7 (1957), 867-877.
- [6] E. LANCONELLI: "Sul confronto della regolarità dei punti di frontiera rispetto ad operatori lineari parabolici diversi", Ann. Mat. Pura e Appl. (IV) vol. CXIV, 207-227.
- [7] E.M. LANDIS: "Necessary and Sufficient Conditions for regularity of a boundary point in the Dirichlet problem for the heat conduction equation" D.A.N. S.S.S.R. 185 (1969).
- [8] W. LITTMAN, G. STAMPACCHIA & H.F. WEINBERGER: "Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients", Ann. S.N.S. Pisa 17 (1963), 43-77.

- [9] P. NEGRINI: "Punti regolari per aperti cilindrici in uno spazio β -armonico". In corso di stampa sul Bollettino della Unione Matematica Italiana.
- [10] O. OLEINIK & E.V. RADKEWITCH: "Second order equations with nonnegative characteristic form" Providence, Amer. Math. Soc., 1973.
- [11] C.D. PAGANI: "Su un problema di valori iniziali per una equazione parabolica singolare", Rend. Sc. Ist. Lombardo A 103 (1969), 618-653.
- [12] V. SCORNAZZANI: "Sul problema di Dirichlet per l'operatore di Kolmogorov", Boll. U.M.I., Suppl. An. Funz. e Appl. Serie V vol. XVIII-C n. 1-1981; 43-62.
- [13] A. TYCHONOV: "Sur l'equation de la chaleur de plusieurs variables", Bull. Univ. Etal. Moscow, Ser. Int. Sect. A: Math. et Mecan. Fasc. 9 (1938).
- [14] N. WIENER: "The Dirichlet Problem", J. Math. and Phys. vol. 3 (1924), 127-146.
- [15] N. WIENER: "Certain notions in Potential Theory", J. Math. and Phys. vol. 3 (1924), 24-51.